

Визначення переміщень в просторовій рамі методом Мора

Алгоритм розв'язання задачі

1. Побудувати схематизовану рамну пружну систему з вказаним навантаженням і аналогічні їй схеми рам з одиничними навантаженнями в площинах xOy і xOz , прийнявши „повзучу” систему осей координат для кожного із стержнів систем.
2. Розбити побудовані пружні системи на однакові ділянки та пронумерувати їх.
3. Для наведених заданої і допоміжних пружних систем записати вирази, що дозволяють визначити величини згинальних і крутних моментів по ділянках „ламаного” стержня $BKL\Omega$ від дії зовнішнього навантаження і одиничних силових факторів $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ в площинах xOy і xOz .
4. Визначити лінійні і кутові переміщення в площинах xOy і xOz використавши аналітичні залежності метода Мора по ділянках заданої пружної системи.
5. Визначити повне лінійне і кутові переміщення перерізу (т. В) в просторі.

Приклад 10. Для заданого просторового стержня жорсткості механізму кріплення кабіни підйому вантажів (рис. 26) визначити розміри поперечних перерізів у стержнях: a – прямокутний, l – квадратний, c – круглий; та переміщення найбільш віддаленої від закріплення точки стержня точки В. для прямокутного поперечного перерізу.

Дано: $M = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $F_1 = 5 \text{ кН}$; $F_2 = 8 \text{ кН}$; $q = 40 \text{ кН/м}$; $a = 0,5 \text{ м}$; $l = 0,7 \text{ м}$; $c = 0,8 \text{ м}$; $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\frac{h}{b} = 2$.

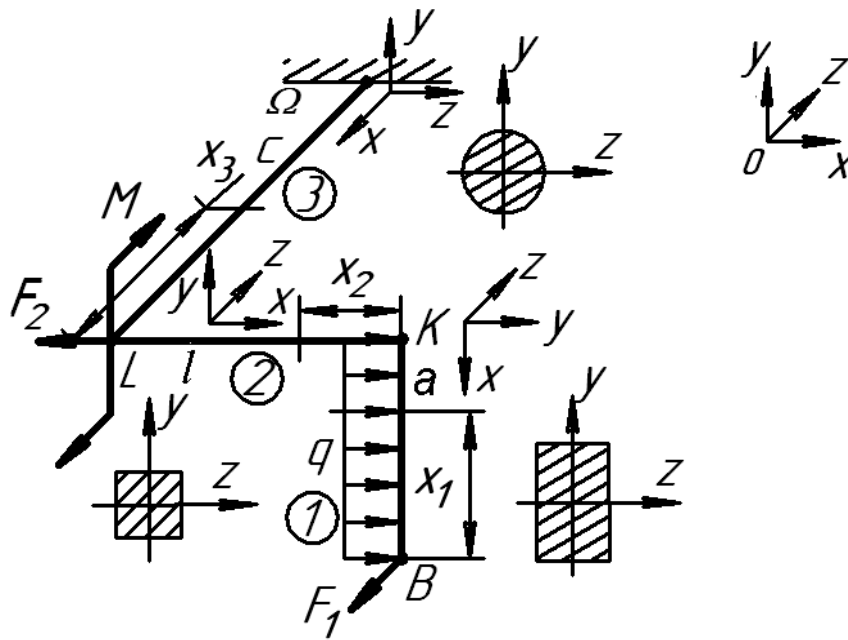


Рис. 26. Схема навантаження бруса та форми поперечних перерізів стержнів.

Розв'язання. 1. Побудуємо схеми заданої рамної конструкції із вказаним навантаженням та відповідними одиничними силовими факторами на допоміжних пружних системах у взаємно перпендикулярних площинах xOy і xOz (рис. 27).

2. Розіб'ємо вказані схеми на ділянки по стержнях, як показано на рисунках 27, а, б нумеруючи їх з вільного (незакріпленого) кінця до закріплення. Правосторонню систему осей координат розмістимо на кожному стержні таким чином щоб вісь Ox завжди була направлена по поздовжній осі стержня від його закріплення до вільного кінця.

Для заданої схеми закріплення і навантаження будемо вважати, що стержень KB закріплено в точці K , а стержень LK – точці L з діючим навантаженням попереднього стержня KB , прикладеним в точці K . Аналогічно, стержень ΩL закріплено в т. Ω із дією на нього всього попереднього навантаження, що прикладається в точці L .

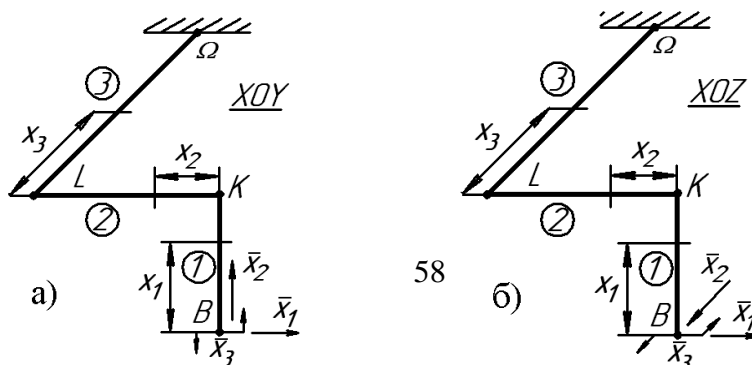


Рис. 27. Допоміжні пружні системи з одиничними навантаженнями

3. Запишемо вирази для згинальних і крутних моментів по ділянках рами від заданого навантаження в площинах xOy і xOz

Площина xOy		Площина xOz	
1. $M_{1F}^z = q \frac{x_1^2}{2};$	$0 \leq x_1 < a = 0,5$	1. $M_{1F}^y = -F_1 x_1;$	$0 \leq x_1 < a = 0,5$
2. $M_{2F}^z = q \frac{a^2}{2};$	$0 \leq x_2 < l = 0,7$	2. $M_{2F}^y = -F_1 x_2;$	$0 \leq x_2 < l = 0,7$
$M_{2F}^{кр} = F_1 \cdot a;$	$0 \leq x_2 < l = 0,7$	$M_{2F}^{кр} = F_1 \cdot a;$	$0 \leq x_2 < l = 0,7$
3. $M_{3F}^z = F_1 \cdot a + M;$	$0 \leq x_3 < c = 0,8$	3. $M_{3F}^y = -F_1 \cdot l - F_2 x_3 + qa \cdot x_3;$	$0 \leq x_3 < c = 0,8$
$M_{3F}^{кр} = -q \frac{a^2}{2};$	$0 \leq x_3 < c = 0,8$	$M_{3F}^{кр} = -q \frac{a^2}{2};$	$0 \leq x_3 < c = 0,8$

Запишемо вирази для згинальних і крутних моментів від прикладених одиничних силових факторів на допоміжних пружних системах:

Площина xOy			
1. $\bar{M}_{11}^z = 1 \cdot x_1;$	$\bar{M}_{12}^z = 0;$	$\bar{M}_{13}^z = 1;$	$0 \leq x_1 < a = 0,5$
2. $\bar{M}_{21}^z = 1 \cdot a;$	$\bar{M}_{21}^z = 1 \cdot x_2;$	$\bar{M}_{23}^z = 1;$	$0 \leq x_2 < l = 0,7$
3. $\bar{M}_{31}^z = 0;$	$\bar{M}_{32}^z = 1 \cdot x_3;$	$\bar{M}_{33}^z = 0;$	$0 \leq x_3 < c = 0,8$
$\bar{M}_{31}^{кр} = -1 \cdot a;$	$\bar{M}_{31}^{кр} = -1 \cdot l;$	$\bar{M}_{33}^{кр} = -1$	

Площина xOz

$$1. \bar{M}_{11}^y = 0; \quad \bar{M}_{12}^y = -1 \cdot x_1; \quad \bar{M}_{13}^y = 0; \quad 0 \leq x_1 < a = 0,5$$

$$\bar{M}_{13}^{kp} = 1;$$

$$2. \bar{M}_{21}^y = 0; \quad \bar{M}_{22}^y = -1 \cdot x_2; \quad \bar{M}_{23}^y = 1; \quad 0 \leq x_2 < l = 0,7$$

$$\bar{M}_{22}^{kp} = 1 \cdot a;$$

$$3. \bar{M}_{31}^y = 1 \cdot x_3; \quad \bar{M}_{32}^y = 1 \cdot x_3; \quad \bar{M}_{33}^1 = 1; \quad 0 \leq x_3 < c = 0,8.$$

$$\bar{M}_{31}^{kp} = -1 \cdot a;$$

4. Для визначення переміщення перерізу (т. В) просторової рами необхідно підставити вирази для вказаних вище згинальних і крутних моментів, що записані по ділянках в інтегральну залежність (6.6) метода Мора.

4.1 Площина xOy

4.1.1. Горизонтальне лінійне переміщення перерізу (т. В):

$$\Delta_{1F}^{(B)} = \sum_{i=1}^n \left(\int_l \frac{M_{iF}^z \bar{M}_i^z}{EI_z} dx + \int_l \frac{M_{iF}^{kp} \bar{M}_i^{kp}}{GI_\rho} dx \right) =$$

$$= \int_0^a \frac{qx_1^2 \cdot 1 \cdot x_1}{2EI_z} dx + \int_0^l \frac{qa^2 \cdot 1 \cdot a}{2EI_z} dx + \int_0^c \frac{(-qa^2)(-1 \cdot 0,5)}{2GI_\rho} dx =$$

$$= \frac{qx_1^4 \cdot 1}{4 \cdot 2EI_z} \Big|_0^{0,5} + \frac{qa^3 x_2 \cdot 1}{2EI_z} \Big|_0^{0,7} + \frac{qa^2 \cdot x_3 \cdot 1}{4GI_\rho} \Big|_0^{0,8} =$$

$$= \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5^4 \cdot 1 \cdot 12}{8 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4,54 \cdot 9,08^3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^4} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 12}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 6,83^4 \cdot 10^{-8}} +$$

$$+ \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5^2 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 32}{4 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} = 5,52 \cdot 10^{-4} + 48,25 \cdot 10^{-4} + 48,81 \cdot 10^{-4} =$$

$$= 102,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 10,26 \text{ мм}.$$

$$\Delta_{1F}^{(B)} = 10,26 \text{ мм.}$$

4.1.2. Вертикальне лінійне переміщення перерізу (т. В):

$$\begin{aligned} \Delta_{2F}^{(B)} &= \sum_{i=1}^n \left(\int_l \frac{M_{iF}^Z \bar{M}_i^Z}{EI_z} dx + \int_l \frac{M_{iF}^{Kp} \bar{M}_i^{Kp}}{GI_\rho} dx \right) = \\ &= \int_0^l \frac{qa^2 \cdot 1 \cdot x_2}{2EI_z} dx + \int_0^l \frac{(Fa + M) \cdot 1 \cdot x_3}{EI_z} dx + \int_0^c \frac{(-qa^2)(-1 \cdot 0,7)}{2GI_\rho} dx = \\ &= \frac{qa^2 \cdot x_2^2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot EI_z} \Big|_0^{0,7} + \frac{F \cdot a \cdot x_3^2 \cdot 1}{2 \cdot EI_z} \Big|_0^{0,8} + \frac{M \cdot x_3^2 \cdot 1}{2 \cdot EI_z} \Big|_0^{0,8} + \frac{0,7qa^2 \cdot x_3 \cdot 1}{2 \cdot GI_\rho} \Big|_0^{0,8} = \\ &= \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 1 \cdot 12}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^4 \cdot 6,83^4 \cdot 10^{-8}} + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 8^2 \cdot 1 \cdot 64}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} + \\ &+ \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 8^2 \cdot 1 \cdot 64}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^2 \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} + \frac{7 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 5^2 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2}{10^4 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 33,78 \cdot 10^{-4} + 1,56 \cdot 10^{-3} + 0,1874 \cdot 10^{-2} + 6,83 \cdot 10^{-3} = \\ &= 136,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 13,65 \text{ мм.} \end{aligned}$$

$$\Delta_{2F}^{(B)} = 13,65 \text{ мм.}$$

4. 1.3. Кутове переміщення т. В в площині (xOy)

$$\begin{aligned} \Delta_{3F}^{(B)} &= \sum_{i=1}^n \left(\int_l \frac{M_{iF}^Z \bar{M}_i^Z}{EI_z} dx + \int_l \frac{M_{iF}^{Kp} \bar{M}_i^{Kp}}{GI_\rho} dx \right) = \int_0^a \frac{qx_1^2 \cdot 1}{2EI} dx + \int_0^l \frac{qa^2 \cdot 1}{2EI} dx + \\ &+ \int_0^c \frac{(-qa^2)(-1)}{2GI_\rho} dx = \frac{qx_1^3 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot EI_z} \Big|_0^{0,5} + \frac{qa^2 \cdot x_2 \cdot 1}{2 \cdot EI_z} \Big|_0^{0,7} + \frac{qa^2 \cdot x_3 \cdot 1}{2 \cdot GI_z} \Big|_0^{0,8} = \\ &= \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5^3 \cdot 1 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4,54 \cdot 9,08^3 \cdot 10^{-8}} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 12}{2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6,834 \cdot 10^{-8}} + \\ &+ \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5^2 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 32}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 8,5^5 \cdot 10^{-8} \cdot 10^3} = \\ &= 1,4712 \cdot 10^{-3} + 9,65 \cdot 10^{-3} + 0,976 \cdot 10^{-2} = \\ &= 0,147 \cdot 10^{-2} + 0,965 \cdot 10^{-2} + 0,976 \cdot 10^{-2} = 2,088 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,020 \text{ рад} = 1,2^\circ. \\ &\Delta_{3F}^{(B)} = 2,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 1,2^\circ. \end{aligned}$$

4.2 Площина xOz

4.2.1. Горизонтальне лінійне переміщення перерізу (т. B) в напрямку осі Ox. (дія \bar{x}_1)

$$\begin{aligned} \Delta_{1F}^{(B)} &= \sum_{i=1}^n \left(\int_l \frac{M_{iF}^y \bar{M}_i^y}{EI_y} dx + \int_l \frac{M_{iF}^{kp} \bar{M}_i^{kp}}{GI_p} dx \right) = \int_0^a \frac{(-F_1 x_1) \cdot 0}{EI_y} dx + \int_0^l \frac{(-F_1 x) \cdot 0}{EI_y} dx + \\ &\int_0^c \frac{(-F_1 l - F_2 x_3 + q a x_3)(1 \cdot x_3)}{EI_y} dx + \int_0^c \frac{(-q a^2)(-1 \cdot a)}{2GI_p} dx = \\ &= - \int_0^c \frac{F_1 l \cdot 1 \cdot x_3}{EI_y} dx - \int_0^c \frac{F_2 x_3^2}{EI_y} dx + \int_0^c \frac{q a x_3^2}{EI_y} dx + \int_0^c \frac{q a^3 \cdot 1}{2GI_p} dx = \\ &= - \frac{F_1 l \cdot 1 \cdot x_3^2}{2EI_y} \Big|_0^{0,8} - \frac{F_2 x_3^3 \cdot 1}{3EI_y} \Big|_0^{0,8} + \frac{q a x_3^3}{3EI_y} \Big|_0^{0,8} + \frac{q a^3 \cdot x_3 \cdot 1}{2GI_p} \Big|_0^{0,8} = \\ &= - \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 7 \cdot 8^2 \cdot 1 \cdot 64}{2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} - \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 8^3 \cdot 1 \cdot 64}{10^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} + \\ &= \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 8^3 \cdot 1 \cdot 64}{10^4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5^3 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 32}{2 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -2,87 \cdot 10^{-3} - 2,67 \cdot 10^{-3} + 66,6 \cdot 10^{-4} + 4,88 \cdot 10^{-3} = \\ &= 6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 6 \text{ мм}. \end{aligned}$$

$$\Delta_{1F}^{(B)} = 6 \text{ мм}.$$

4.2.2. Горизонтальне лінійне переміщення перерізу (т. B) в напрямку осі Oz. (дія \bar{x}_2)

$$\begin{aligned} \Delta_{2F}^{(B)} &= \sum_{i=1}^n \left(\int_l \frac{M_{iF}^y \bar{M}_i^y}{EI_y} dx + \int_l \frac{M_{iF}^{kp} \bar{M}_i^{kp}}{GI_p} dx \right) = \\ &= \int_0^a \frac{(-F_1 x_1)(-1 \cdot x_1)}{EI_y} dx + \int_0^l \frac{(-F_1 x_2)(-1 \cdot x_2)}{EI_y} dx + \\ &+ \int_0^c \frac{(-F_1 l - F_2 x_3 + q a x_3)(1 \cdot x_3)}{EI_y} dx + \int_0^l \frac{F_1 \cdot a \cdot 1 \cdot a}{GI_k} dx = \\ &= \int_0^a \frac{F_1 x_1^2 \cdot 1}{EI_y} dx + \int_0^l \frac{F_1 x_2^2 \cdot 1}{EI_y} dx - \int_0^c \frac{F_1 l \cdot 1 \cdot x_3}{EI_y} dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\int_0^c \frac{F_2 x_3^2 \cdot 1}{EI_y} dx + \int_0^c \frac{qax_3^2 \cdot 1}{EI_y} dx + \int_0^l \frac{F_1 \cdot a^2 \cdot 1}{GI_k} dx = \\
& = \frac{F_1 x_1^3 \cdot 1}{3EI_y} \Big|_0^{0,5} + \frac{F_1 x_2^3 \cdot 1}{3EI_y} \Big|_0^{0,7} - \frac{F_1 l \cdot x_3^2}{2EI_y} \Big|_0^{0,8} - \frac{F_2 x_3^3 \cdot 1}{3EI_y} \Big|_0^{0,8} + \frac{qax_3^3 \cdot 1}{3EI_y} \Big|_0^{0,8} + \frac{F_1 \cdot a^2 \cdot x_2}{GI_p} \Big|_0^{0,7} = \\
& = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 5^3 \cdot 1 \cdot 12}{3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4,54^3 \cdot 9,08 \cdot 10^{-8}} + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 7^3 \cdot 1 \cdot 12}{3 \cdot 10^3 \cdot 6,83^4 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{11}} - \\
& - \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 7 \cdot 8^2 \cdot 1 \cdot 64}{2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} - \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 8^3 \cdot 1 \cdot 64}{3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} + \\
& + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 8^3 \cdot 1 \cdot 64}{3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 1}{10^3 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,141 \cdot 6,83^4 \cdot 10^{-8}} = \\
& = 1,47 \cdot 10^{-3} + 1,57 \cdot 10^{-3} - 2,19 \cdot 10^{-3} - 2,67 \cdot 10^{-3} + 6,66 \cdot 10^{-3} + 3,57 \cdot 10^{-3} = \\
& = 8,41 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,41 \text{ мм.}
\end{aligned}$$

$$\Delta_{2F}^{(B)} = 8,41 \text{ мм.}$$

4.2.3. Кутове переміщення перерізу (т. В)

$$\begin{aligned}
\Delta_{3F}^{(B)} &= \sum_{i=1}^n \left(\int_l \frac{M_{iF}^y \bar{M}_i^y}{EI_y} dx + \int_l \frac{M_{iF}^{kp} \bar{M}_i^{kp}}{GI_p} dx \right) = \\
&= \int_0^l \frac{(-F_1 x_2) \cdot 1}{EI_y} dx + \int_0^c \frac{(-F_1 l - F_2 x_3 + qa \cdot x_3) \cdot 1}{EI_y} dx = \\
&= -\int_0^l \frac{F_1 x_2 \cdot 1}{EI_y} dx - \int_0^c \frac{F_1 \cdot l \cdot 1}{EI_y} dx - \int_0^c \frac{F_2 \cdot x_3 \cdot 1}{EI_y} dx + \int_0^c \frac{qax_3 \cdot 1}{EI_y} dx = \\
&= -\frac{F_1 x_2^2 \cdot 1}{2EI_y} \Big|_0^{0,7} - \frac{F_1 l \cdot x_3 \cdot 1}{EI_y} \Big|_0^{0,8} - \frac{F_2 x_3^2 \cdot 1}{2EI_y} \Big|_0^{0,8} + \frac{qax_3^2 \cdot 1}{2EI_y} \Big|_0^{0,8} = \\
&= -\frac{5 \cdot 10^3 \cdot 7^2 \cdot 1 \cdot 12}{10^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6,83^4 \cdot 10^{-8}} - \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 64}{10^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} - \\
&- \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 8^2 \cdot 1 \cdot 64}{10^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 8^2 \cdot 1 \cdot 64}{10^3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\
&= -3,38 \cdot 10^{-3} - 5,47 \cdot 10^{-3} - 5,0 \cdot 10^{-3} + 12,50 \cdot 10^{-3} = \\
&= -1,35 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -0,00135 \text{ рад} \approx -0,08^\circ.
\end{aligned}$$

$$\Delta_{3F}^{(B)} = -0,135 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \approx -0,08^\circ.$$

4.3. Загальне (повне) лінійне переміщення перерізу (т. *B*) в просторі під дією заданого навантаження при вказаних геометричних розмірах і умовах закріплення пружної системи складе:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{заг}}^{(B)} &= \sqrt{(\Delta_{1\text{гор}}^{xOy} + \Delta_{1\text{гор}}^{xOz})^2 + (\Delta_{2\text{гор}}^{xOz})^2 + (\Delta_{2\text{вер}}^{xOz})^2}; \\ \Delta_{\text{заг}}^{(B)} &= \sqrt{(10,26 + 6)^2 + (8,41)^2 + (13,65)^2} = \\ &= \sqrt{264,39 + 70,73 + 186,32} = \sqrt{521,44} = 22,84 \text{ мм}. \\ \Delta_{\text{заг}}^{(B)} &= 22,84 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Слід відмітити, знак „+” при визначеній величині переміщення вказує на те, що вказаний переріз буде переміщуватися під дією зовнішнього навантаження в напрямку дії відповідного одиничного зусилля. А знак „–” вказує на те, що дійсне переміщення перерізу (т. *B*) буде відбуватися в напрямку протилежному від дії одиничного силового фактора на допоміжній пружній системі.

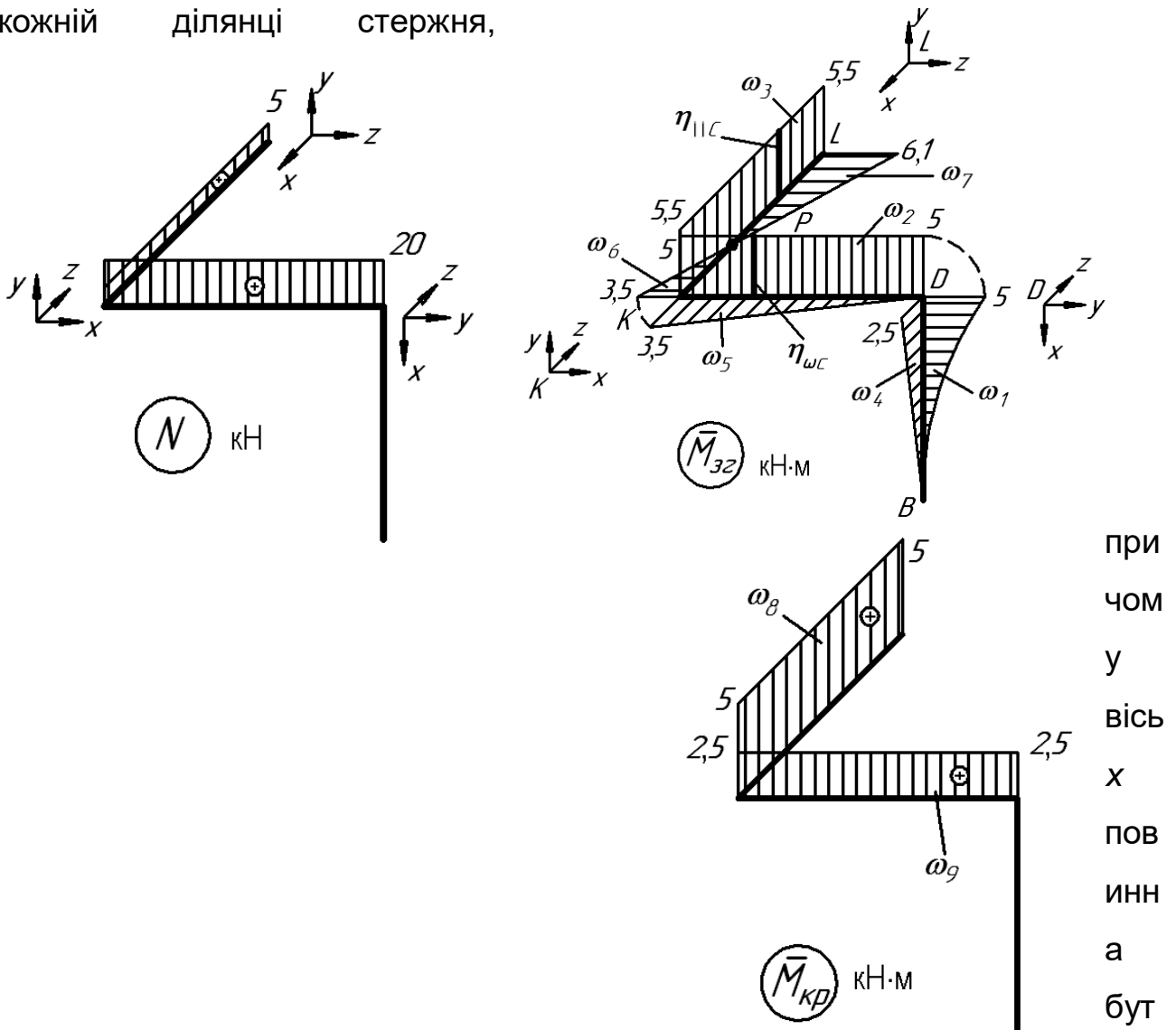
Розрахунок на міцність просторової рами і визначення переміщень способом Верещагіна

Алгоритм розв'язання задачі

1. Побудувати епюри поздовжніх та поперечних зусиль, згинальних і крутних моментів від заданого навантаження.
2. Для кожної ділянки просторового стержня встановити небезпечний переріз.
3. У небезпечному перерізі, вказавши закон розподілу напружень від дії кожного силового фактора, визначити найбільш небезпечну точку. Використовуючи відповідні теорії міцності, визначити розміри поперечного перерізу на кожній ділянці.

4. Побудувати пружну систему, аналогічну заданій, і навантажити її у вказаній точці відповідно вертикально й горизонтально діючими одиничними зусиллями та одиничним моментом у площинах xOy і xOz .
5. Побудувати епюри всіх внутрішніх зусиль по довжині ділянок від дії одиничних силових факторів.
6. Визначити вертикальне, горизонтальне, а також повне лінійне та кутове переміщення вказаної точки пружної системи.

Розв'язання. 1. Побудуємо епюри N , Q_y , Q_z , M_y , M_z та $M_{кр}$ від дії зовнішнього навантаження рис. 28, задаючись правосторонньою системою осей координат на кожній ділянці стержня,



и завжди направлена по поздовжній осі стержня.

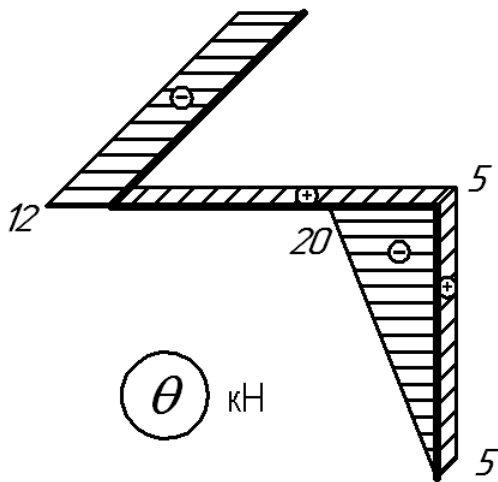


Рис. 28. Епюри внутрішніх зусиль від заданого зовнішнього навантаження

2. Для визначення небезпечних перерізів по довжині просторового „ламаного” стержня необхідно з’ясувати величини діючих навантажень та провести аналіз напруженого стану по його ділянках, опираючись на епюри від заданого навантаження.

Слід сказати, що практика розрахунків і експериментальні дослідження дозволяють при визначенні небезпечних перерізів по довжині конструкційних елементів в першому наближенні, не враховувати дію поздовжніх і поперечних сил. Оскільки величини відповідних напружень від їх дії в десятки разів менші ніж від дії згинальних і крутних моментів.

Таким чином, аналіз „вантажної” епюри вказує на те, що переріз стержня BK в т. B буде знаходитись в умовах одноосного напруженого стану, який визвано дією двох згинальних моментів M_z і M_y в площинах xOy і xOz , відповідно.

Стержні KL і LQ знаходяться в умовах дії більш небезпечного складного напруженого стану, так як на них наряду із дією нормальних напружень σ_z і σ_y від згинальних моментів в двох взаємно перпендикулярних площинах накладається дія дотичних $\tau_{кр}$ напружень від крутного моменту по всій їх довжині. А маючи величини вказаних

напружень можемо стверджувати, що переріз в точці Ω знаходиться в найбільш небезпечному напруженому стані (див. епюри згинальних і крутного моментів рис. 28).

3. Аналіз напруженого стану в небезпечних перерізах стержнів дає можливість встановити і найбільш небезпечні точки в самих перерізах. А знаючи характер розподілу і величини діючих силових факторів за умовами міцності або за відповідними теоріями міцності визначимо розміри стержнів рами.

Стержень 1 (BK) знаходиться в умовах дії неплоского (складного) згину.

Небезпечним перерізом буде той, де $M_z = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і $M_y = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Через те, що $M_z > M_y$, стержень розміщуємо так, щоб $W_z > W_y$, тобто вісь Oz буде віссю максимумів, а отже, моменти опору визначаються так:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2}{3}b^3; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{2b^3}{6} = \frac{1}{3}b^3.$$

З умови міцності (5.1) в кутовій точці C (рис. 29) профілю визначимо розміри поперечного перерізу.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma];$$

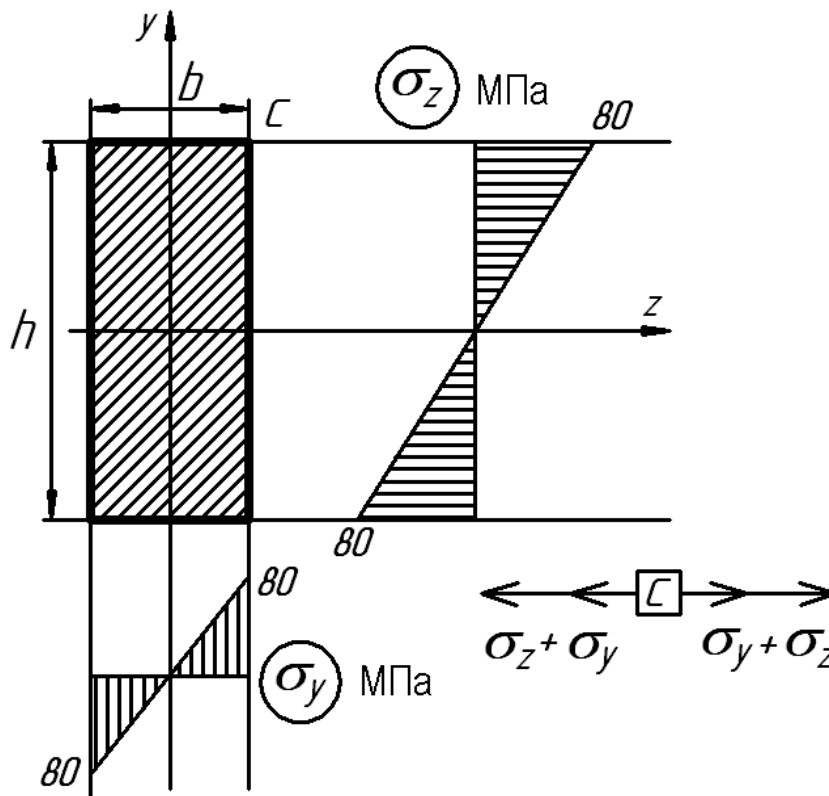


Рис. 29. Епюри нормальних напружень по перерізу

$$\sigma_{\max} = \frac{5000 \cdot 3}{2b^3} + \frac{2500 \cdot 3}{b^3} = 160 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Звідки $b = 4,54 \text{ см}$; $h = 9,08 \text{ см}$.

Стержень 2 (KL) знаходиться в умовах дії згину і кручення.

У небезпечному перерізі діють $M_z = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_y = 3,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_{\text{кр}} = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Епюри розподілу нормальних та дотичних напружень по висоті поперечного перерізу в другому стержні приведено на рис. 30.

Підбирати розміри поперечного перерізу необхідно, виходячи з умови міцності в точці C , де сумуються максимальні напруження від дії M_z і M_y й в точці K , де діють максимальні нормальні напруження від M_z та дотичні напруження від $M_{\text{кр}}$.

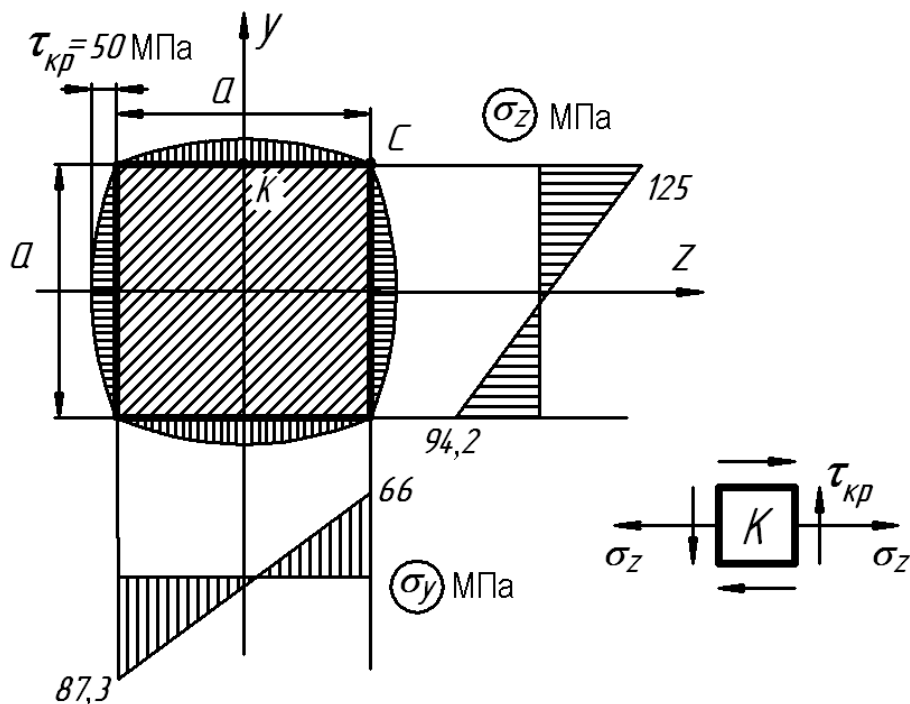


Рис. 30. Епюри нормальних і дотичних напружень в перерізі

Умову міцності для точки С, а відповідно і розмір квадратного поперечного перерізу визначимо аналогічно попередньому випадкові:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma],$$

$$\frac{5000 \cdot 6}{a^3} + \frac{3500 \cdot 6}{a^3} = 160 \cdot 10^6.$$

Звідки $a = 6,83$ см.

Оскільки точка К знаходиться в складному напруженому стані, визначення розмірів проведемо за третьою теорією міцності

$$\sigma_{\max}^{(3)} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (6.12)$$

$$\sigma_z = \frac{M_z}{W_z} = \frac{5000 \cdot 6}{a^3}; \quad \tau = \frac{M_{kp}}{W_k} = \frac{2500}{0,208 \cdot a^3},$$

де $\alpha = 0,208$ – для квадратного поперечного перерізу.

Звідки $a = 6,22$ см.

Отже, для другого стержня приймаємо розмір сторони квадрата рівний 6,83 см.

Стержень 3 ($L\Omega$) знаходиться в умовах дії згину і кручення рис. 31.

Необхідно встановити небезпечний переріз по його довжині. Крутний момент є постійним по всій його довжині і дорівнює $5 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Сумарний згинальний момент у затисненні визначимо, згідно формули (5.18), так:

$$M_{зг} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{5,5^2 + 6,1^2} = 8,22 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

а на протилежному кінці цього стержня

$$M_{зг} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{5,5^2 + 3,5^2} = 6,52 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Таким чином, небезпечний переріз буде в затисненні.

Розрахунок проводимо за основною умовою міцності (5.17):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{пр}}}{W_{зг}} = \frac{\sqrt{M_{зг}^2 + M_{кр}^2}}{W} \leq [\sigma];$$

$$M_{\text{пр}} = \sqrt{(M_{зг})_{\max}^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{(8,22)^2 + 5^2} = 9,62 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

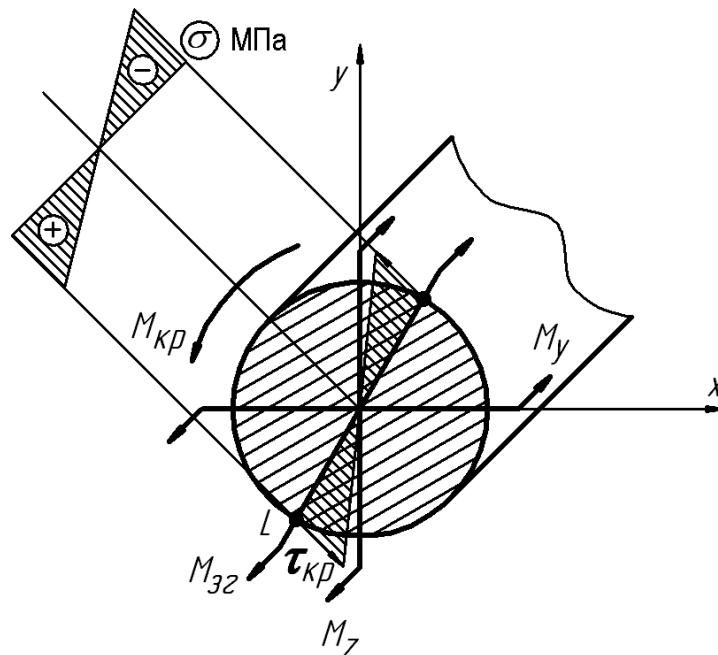


Рис. 31. Схема внутрішніх силових факторів та напружень, що діють в затисненні.

Відтак, діаметр стержня повинен бути

$$D = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{пр}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{9,62 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 8,44 \text{ см}.$$

Трохи закруглюючи в сторону запасу міцності, прийнемо діаметр стержня на третій ділянці рівним $D=8,5$ см.

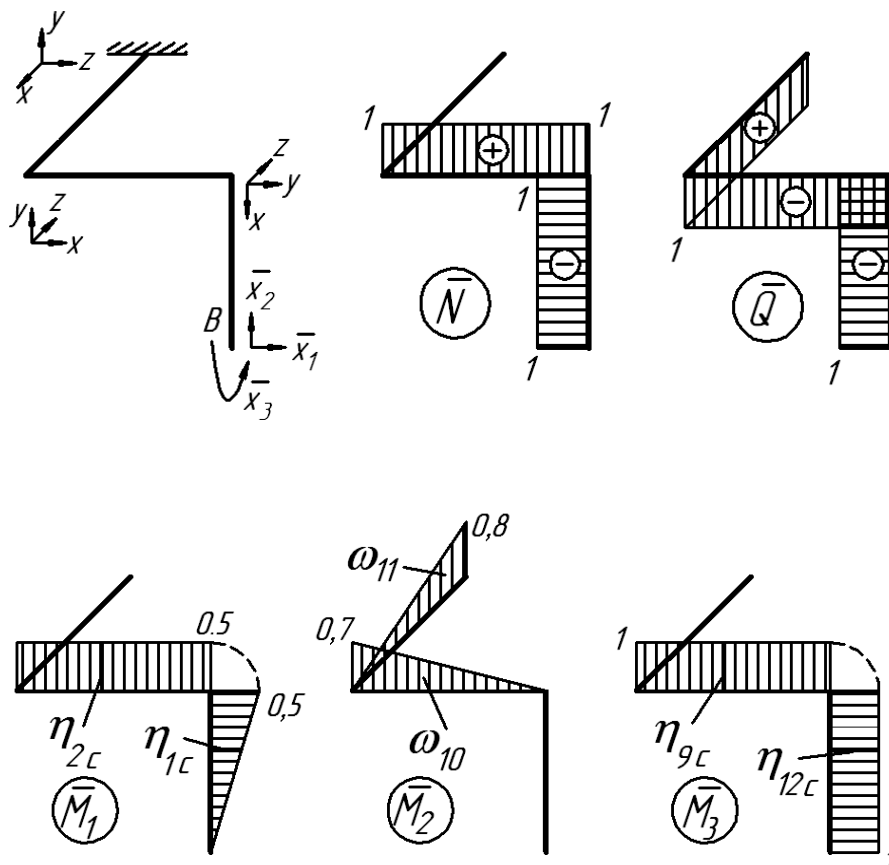
Перевіримо, якою величиною напружень ми знехтували, визначаючи розміри поперечного перерізу, коли не брали до уваги дію поздовжнього зусилля, наприклад, на другій ділянці стержня.

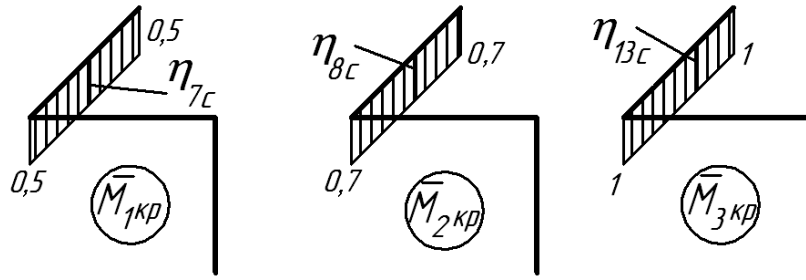
$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{20 \cdot 10^3}{6,83^2 \cdot 10^{-4}} = 4,3 \text{ МПа.}$$

Це складає десь близько 3% від напружень, що виникають на цій ділянці стержня при дії згинальних моментів. Таким чином, похибка від неврахування дії поздовжнього зусилля не виходить за межі допустимої її величини в інженерних розрахунках.

4. Визначимо переміщення за способом Верещагіна. Для цього побудуємо епюри розподілу внутрішніх зусиль у допоміжних пружних системах, що аналогічні заданій, від одиничних сил $\bar{X}_1; \bar{X}_2; \bar{X}_3$, які діють у перерізі т. В (див. рис. 32) для площин xOy і xOz .

Площина xOy





Площина xOz

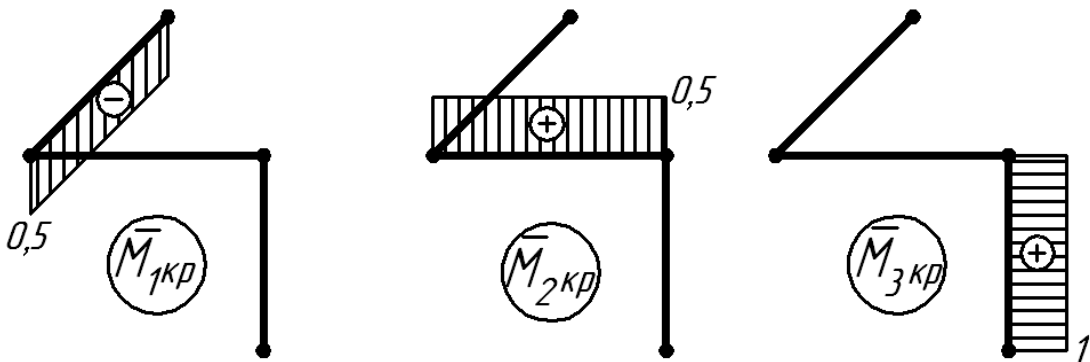
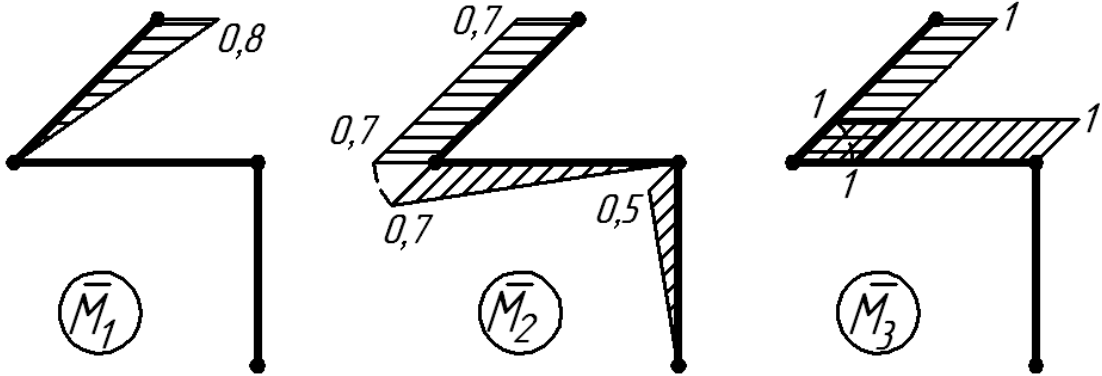
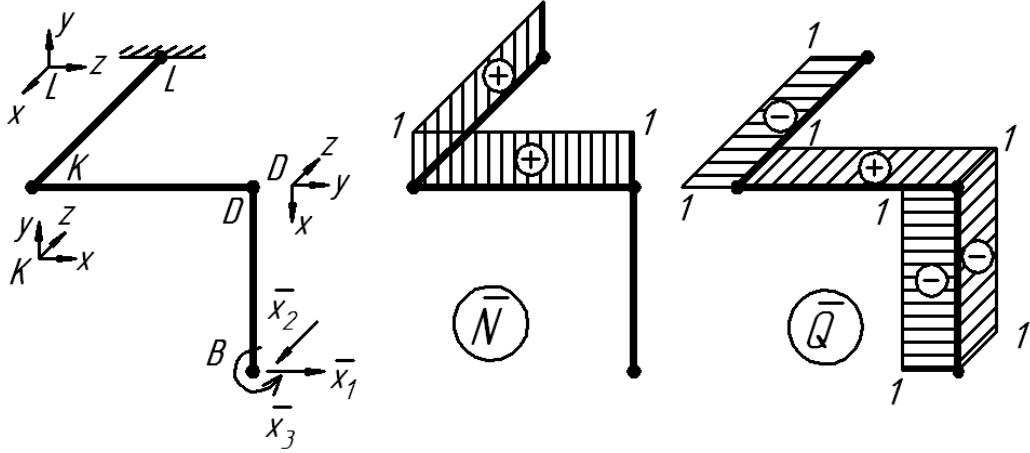


Рис. 32. Допоміжні пружні системи та епюри розподілу внутрішніх зусиль від дії одиничних силових факторів у площинах yOx і yOz .

6. Для визначення переміщень точок пружної системи згідно зі способом Верещагіна необхідно перемножити відповідні епюри розподілу внутрішніх зусиль від дії зовнішнього навантаження та одиничних силових факторів по ділянках даного просторового стержня.

Для спрощення вирішення поставленої задачі, а також беручи до уваги те, що йдеться про проведення **проектувального** розрахунку в першому наближенні, і впевнившись вище в незначному впливі на результати розрахунків нормальних і дотичних напружень від дії поздовжнього та поперечних зусиль, величини переміщень будемо розраховувати тільки, враховуючи згинальні та крутний моменти.

6.1. Площина xOy

6.1.1. Горизонтальне лінійне переміщення перерізу (т. B) в напрямку осі Ox:

$$\Delta_{iF}^{(B)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\omega_{iF} \cdot \eta_{ic}}{(EI_z)_i} + \frac{\omega_{iF} \cdot \eta_{ic}}{(GI_\rho)_i} \right) \quad (6.13)$$

де $\Delta_{iF}^{(B)}$ – лінійне переміщення перерізу (т. B) в напрямку одної із осей системи координат xOy від заданого навантаження; ω_{iF} – площа вантажної епюри від згинальних і крутного моментів; η_{ic} – ордината епюри згинальних і крутного моментів від дії одиничного навантаження під центром ваги вантажної епюри на відповідній ділянці просторового стержня; $(EI_z)_i$ і $(GI_\rho)_i$ – жорсткості поперечного перерізу стержня на відповідній ділянці при згині та крученні.

$$\begin{aligned} \Delta_{1F}^{(B)} &= \frac{\omega_{1F} \eta_{1c}}{(EI_z)_1} + \frac{\omega_{2F} \eta_{2c}}{(EI_z)_2} + \frac{\omega_{8F} \cdot \eta_{8c}}{(GI_\rho)_3} = \\ &= \frac{1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 1}{3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10 \cdot 4,54 \cdot 9,08^3 \cdot 10^{-8}} + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 12}{10^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6,83^4 \cdot 10^{-8}} + \\ &+ \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 32}{10^2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 8,5^3 \cdot 10^{-8}} = 0,552 \cdot 10^{-3} + 4,825 \cdot 10^{-3} + 4,881 \cdot 10^{-3} \approx \end{aligned}$$

$$\approx 10,26 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 10,26 \text{ мм.}$$

$$\Delta_{1F}^{(B)} = 10,26 \text{ мм.}$$

6.1.2. Вертикальне лінійне переміщення перерізу (т. *B*) в напрямку осі *Oy*.

$$\begin{aligned} \Delta_{2F}^{(B)} &= \frac{\omega_{10} \cdot \eta_{10C}}{(EI_z)_2} + \frac{\omega_{11} \cdot \eta_{11C}}{(EI_z)_3} + \frac{\omega_8 \cdot \eta_{9C}}{(GI_\rho)_3} = \frac{1 \cdot 7^2 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 12}{2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6,83^4 \cdot 10^{-8}} + \\ &+ \frac{1 \cdot 8^2 \cdot 5,5 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 64}{2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 32}{10^2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 3,378 \cdot 10^{-3} + 3,436 \cdot 10^{-3} + 6,833 \cdot 10^{-3} = 13,647 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 13,65 \text{ мм.} \\ \Delta_{2F}^{(B)} &= 13,65 \text{ мм.} \end{aligned}$$

6.1.3. Кутове переміщення перерізу (т. *B*) в площині *xOy*.

$$\begin{aligned} \Delta_{3F}^{(B)} &= \frac{\omega_1 \cdot \eta_{12C}}{(EI_z)_1} + \frac{\omega_2 \cdot \eta_{13C}}{(EI_z)_2} + \frac{\omega_8 \cdot \eta_{14C}}{(GI_\rho)_3} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 12}{3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 4,54 \cdot 9,08^3 \cdot 10^{-8}} + \\ &+ \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 12}{10 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6,83^4 \cdot 10^{-8}} + \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 32}{10 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 8,5^4 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 1,47 \cdot 10^{-3} + 9,65 \cdot 10^{-3} + 9,76 \cdot 10^{-3} = 2,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад} \approx 1,2^\circ. \\ \Delta_{3F}^{(B)} &= 2,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 1,2^\circ. \end{aligned}$$

Співставивши величини лінійних переміщень перерізу (т. *B*) в напрямках осей *Ox* і *Oy*, а також величини кутових переміщень, визначених за допомогою інтегрального методу Мора і графоаналітичного способу Верещагіна для площини *xOy*, впевнюємося в їх ідентичності або рівновеликості.

Читач має можливість, для закріплення матеріалу і поглиблення практичних навиків в користуванні даним методом визначення переміщень в статично визначних пружних системах, розрахувати лінійні і кутові переміщення (т. *B*) способом Верещагіна в площині *xOz* та

порівняти з наведеними в посібнику значеннями, що враховані за методом Мора.

Таким чином повне лінійне переміщення перерізу (т. В):
в просторі складає –

$$\Delta_{(B)} = 22,84 \text{ мм.}$$

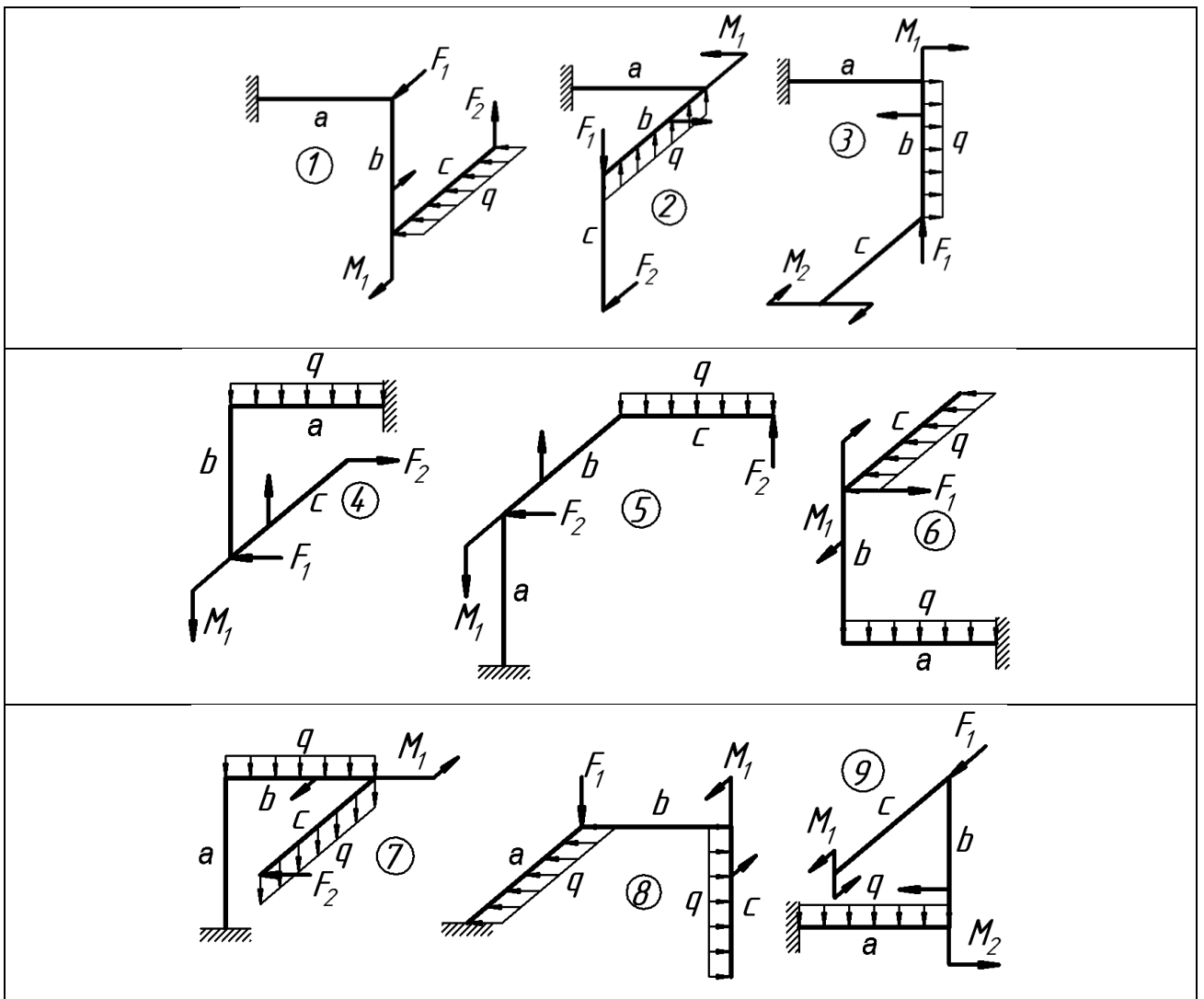
— кутове переміщення в площині xOy –

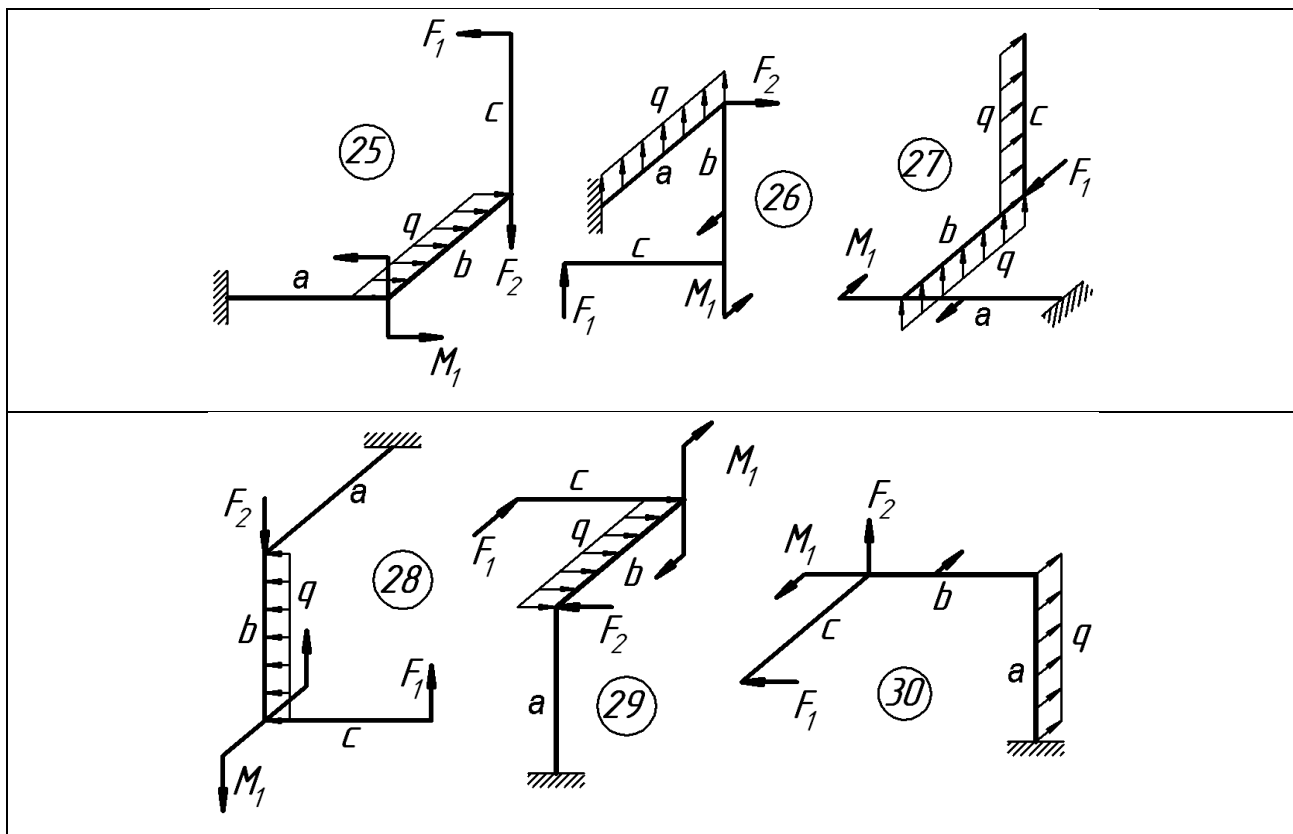
$$\Delta_B^{xOy} \approx 2,09 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 1,2^\circ.$$

— кутове переміщення в площині xOz відповідно –

$$\Delta_B^{xOz} \approx 0,14 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,08^\circ.$$

Варіанти завдань до шостого розділу (просторові пружні системи)





Таблиця 9. Матеріал та числові дані до схем навантаження стержневих просторових пружних систем

№ п/п	M_1 кН · м	M_2 , кН · м	F_1 , кН	F_2 , кН	q , кН/м	a , м	l , м	c , м	Матеріал
1	30	50	95	105	55	1,5	1,3	1,1	Ст. 3
2	55	70	90	100	40	1,6	1,4	1,2	Ст. 60Г
3	15	25	40	120	30	0,9	0,7	0,5	Ст. 2
4	80	60	50	90	20	1,8	1,6	1,0	Ст. 45
5	60	70	80	50	10	1,5	1,3	1,2	Ст. 40Х
6	80	60	50	70	20	1,4	1,1	0,9	Ст. 45Х
7	120	150	180	100	25	1,2	1,0	0,8	Ст. 30ХМ
8	140	160	200	150	25	1,3	1,2	1,2	Ст. 30ХН
9	150	120	110	100	30	1,6	1,3	1,1	Ст. 60
10	200	150	190	140	20	1,7	1,5	1,0	Ст. 50

11	180	170	160	180	35	1,7	1,4	1,5	Ст. 40
12	70	90	50	80	40	0,9	0,8	0,7	Ст. 30
13	90	70	60	95	50	0,8	0,8	0,6	Ст. 20
14	110	100	150	190	45	1,0	0,9	0,7	Ст. 10
15	130	120	170	125	40	1,3	1,1	1,2	Ст. 6
16	140	100	150	130	35	1,5	1,6	1,4	Ст. 5
17	125	115	110	170	30	1,6	1,5	1,4	Ст. 4
18	130	120	135	115	20	1,4	0,9	0,7	Ст. 3
19	115	125	140	120	15	1,6	1,3	1,0	Ст. 2
20	105	120	115	100	50	1,3	1,2	1,1	Ст. 1
21	180	200	220	250	40	1,2	1,1	1,3	Ст. 60Г
22	190	200	250	300	25	1,4	1,2	1,0	Ст. 20К
23	210	250	180	200	35	1,2	1,2	1,3	Ст. 30Г
24	230	200	220	160	40	1,3	1,0	0,8	Ст. 15К
25	50	80	70	60	20	1,2	1,3	0,9	Ст. 20
26	70	90	60	40	50	0,8	0,7	0,6	Ст. 10
27	60	80	90	100	30	0,9	0,7	0,5	Ст. 6
28	80	100	120	140	25	0,8	0,6	0,5	Ст. 5
29	120	150	130	100	20	1,5	1,4	1,3	Ст. 4
30	200	250	180	140	50	1,4	1,3	1,0	Ст. 30