

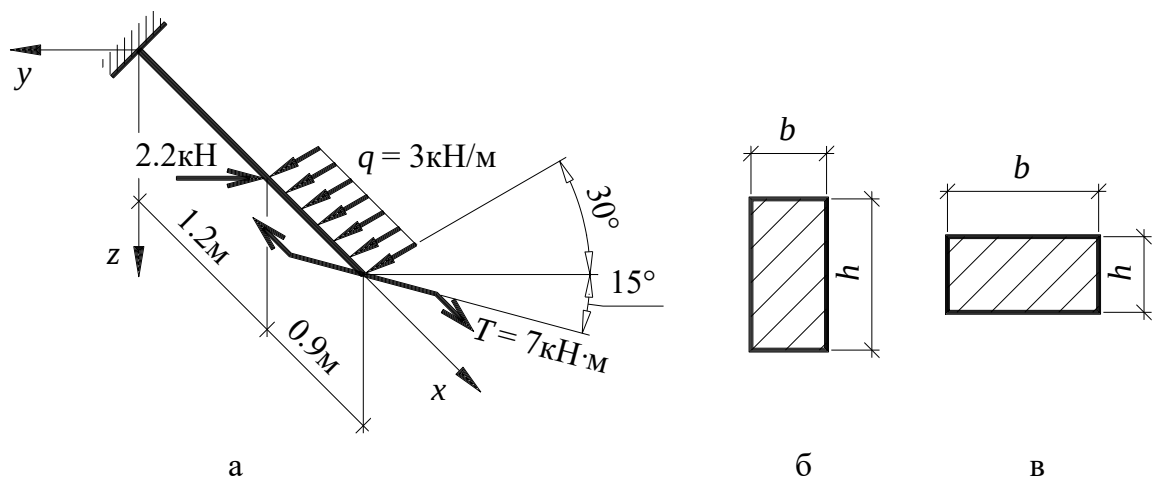


Рис. 1

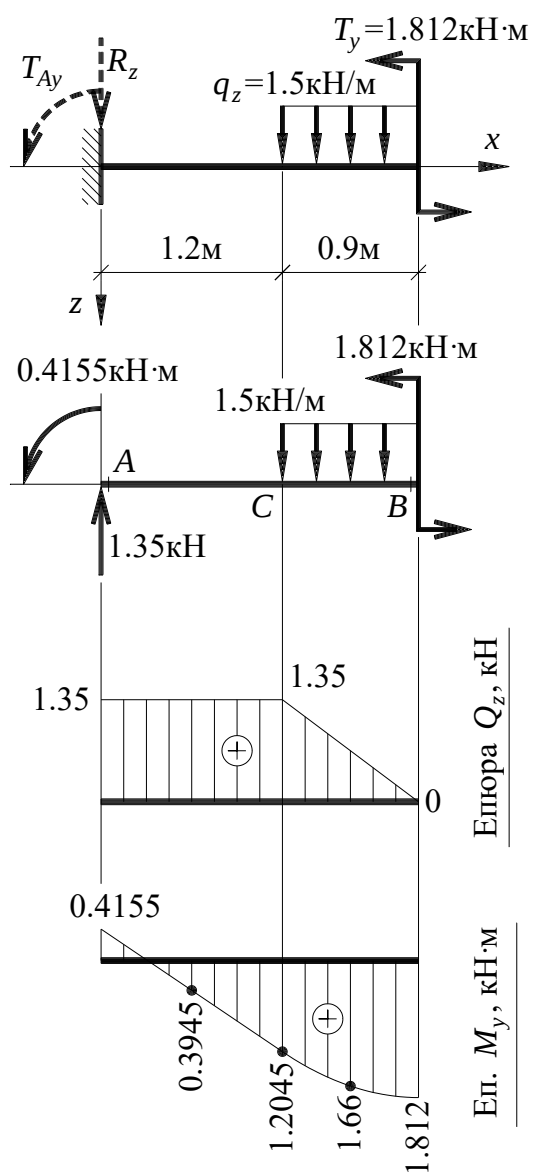


Рис. 2

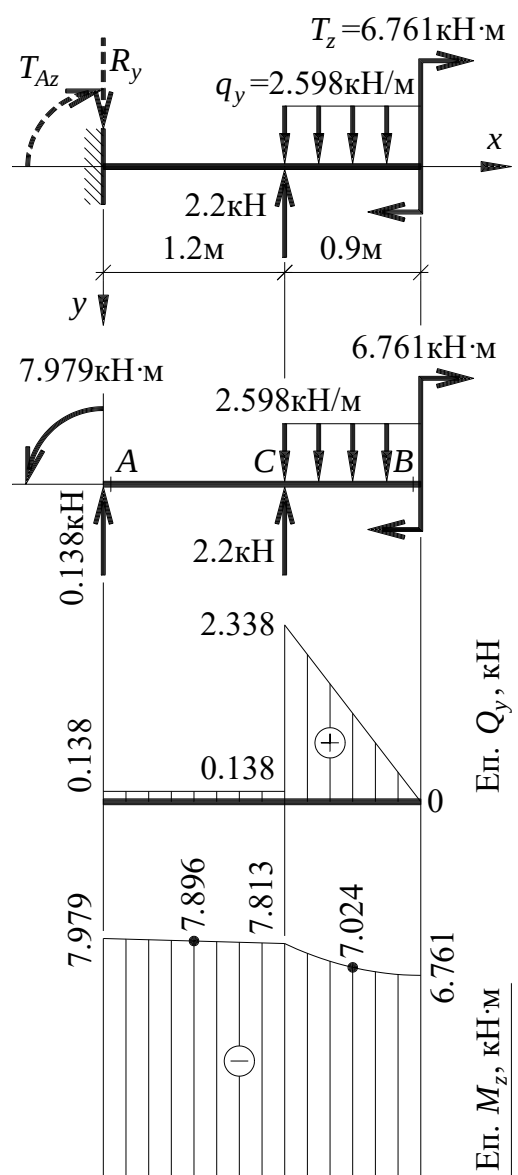


Рис. 3

Задана схема балки з розмірами й величинами навантажень (показана на рис. 1.а в диметричній проекції). Балка повинна мати переріз у вигляді прямокутника з відношенням сторін $h/b \approx 1.7$ (рис. 1.б) або $b/h \approx 1.7$ (рис. 1.в). Вимагається підібрати переріз балки (обрати раціональну форму з двох варіантів і визначити розміри b й h із точністю до 1см), побудувати епюри нормального напруження в небезпечних перетинах, визначити прогини вільного кінця балки. Матеріал балки має дозволене напруження $\sigma_{adm} = 8 \text{ МПа}$ і модуль пружності $E = 10^4 \text{ МПа}$.

Епюри внутрішніх зусиль

Балка перебуває в стані складного згинання. При визначенні опорних реакцій і внутрішніх зусиль дану просторову задачу можна розглядати як дві незалежні плоскі задачі. Спроекуємо прикладені до балки похилі навантаження на вертикальну й горизонтальну площини.

Проекції розподіленого силового навантаження q (рис. 4) дорівнюють

$$q_y = q \cos 30^\circ = 2.598 \text{ кН/м},$$

$$q_z = q \sin 30^\circ = 1.5 \text{ кН/м}.$$

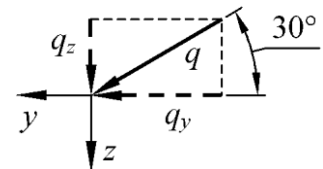


Рис. 4

Зосереджене моментне навантаження T може бути представлене у вигляді вектора $\vec{T}$ (рис. 5), спрямованого за правилом правої руки відносно момента T перпендикулярно площині дії момента T .

Вектор $\vec{T}$ можна представити як суму двох векторів, паралельних до координатних осей: $\vec{T} = \vec{T}_y + \vec{T}_z$.

Модулі цих векторів дорівнюють

$$T_y = T \sin 15^\circ = 1.812 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$T_z = T \cos 15^\circ = 6.761 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

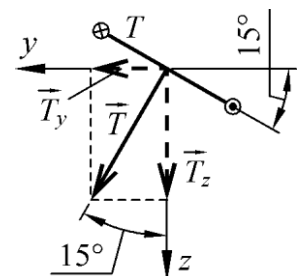


Рис. 5

Вектор $\vec{T}_y$ відповідає моментові у вертикальній площині,

$\vec{T}_z$ — у горизонтальній. Ці моменти спрямовані за правилом правої руки відносно векторів $\vec{T}_y$ і $\vec{T}_z$.

Будуємо на рис. 2 вид зліва схеми балки, на якому показуємо зовнішні навантаження й опорні реакції, що діють у вертикальній площині. Розглядаючи отриману схему як плоску задачу, визначаємо реакції R_z і T_{Ay} , поперечну силу Q_z і згинальний момент M_y . Будуємо епюри Q_z і M_y на рис. 2.

Будуємо на рис. 3 вид згори схеми балки, на якому показуємо навантаження й реакції, що діють у горизонтальній площині. Визначаємо реакції R_y і T_{Az} , поперечну силу Q_y і згинальний момент M_z . Будуємо епюри Q_y і M_z на рис. 3.

Інші внутрішні зусилля при згинанні дорівнюють нулю.

Умова міцності й геометричні характеристики перерізу

Судячи з епюр згинальних моментів (рис. 2, 3), найбільший по модулю згинальний момент діє в горизонтальній площині ($M_z = -7.979 \text{ кН} \cdot \text{м}$ у перетині А). Отже, раціональною буде така форма перерізу, за якої площа найбільшої жорсткості балки пролягатиме також горизонтально. Слід обрати горизонтально видовжений прямокутник (рис. 1.в).

Переріз ми підбиратимемо, виходячи з умови міцності за нормальним напруженням

$$\frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq \sigma_{\text{adm}}, \quad (1)$$

де W_y та W_z — моменти опору перерізу відносно його головних осей y та z . Виведемо формули, які виражатимуть ці моменти опору через один із розмірів прямокутника, наприклад — через h .

Моменти опору прямокутника дорівнюють

$$W_y = \frac{bh^2}{6}, \quad W_z = \frac{hb^2}{6}.$$

Виходитимемо з точного відношення сторін $b/h = 1.7$. Тоді $b = 1.7h$,

$$\begin{aligned} W_y &= \frac{1.7h \cdot h^2}{6} = \frac{1.7}{6} h^3, \\ W_z &= \frac{h(1.7h)^2}{6} = \frac{1.7^2}{6} h^3. \end{aligned} \quad (2)$$

Підставимо формули (2) в нерівність (1) і перетворимо ліву частину:

$$\frac{|M_y|}{\frac{1.7}{6} h^3} + \frac{|M_z|}{\frac{1.7^2}{6} h^3} = \frac{6|M_y|}{1.7h^3} + \frac{6|M_z|}{1.7^2 h^3} = \frac{6}{1.7h^3} \left(|M_y| + \frac{|M_z|}{1.7} \right) \leq \sigma_{\text{adm}}.$$

Потрібну величину h^3 виразимо з рівняння $\frac{6}{1.7h^3} \left(|M_y| + \frac{|M_z|}{1.7} \right) = \sigma_{\text{adm}}$:

$$h^3 = \left(|M_y| + \frac{|M_z|}{1.7} \right) \frac{6}{1.7 \sigma_{\text{adm}}} . \quad (3)$$

Підбір перерізу

Найбільш небезпечні за нормальним напруженням перетини можуть виявитися в точках А, В і С (рис. 2, 3). У точці А свого найбільшого по модулю значення набуває згинальний момент M_z . У точці В — M_y . У точці С збігаються велике значення M_z і порівняно велике значення M_y .

Визначимо потрібну висоту перерізу за формулою (3), виходячи з умови міцності в перетині А, де $M_y = -0.4155 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_z = -7.979 \text{ кН} \cdot \text{м}$:

$$h^3 = \left(0.4155 + \frac{7.979}{1.7} \right) \frac{\text{кН} \cdot \text{м} \cdot 6}{1.7 \cdot 8 \text{ МПа}} = \left(0.4155 + \frac{7.979}{1.7} \right) \frac{6}{1.7 \cdot 8} 10^3 \text{ см}^3 = 2253.98 \text{ см}^3.$$

Аналогічно — в перетині В, де $M_y = 1.812 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_z = -6.761 \text{ кН} \cdot \text{м}$:

$$h^3 = \left(1.812 + \frac{6.761}{1.7} \right) \frac{\text{кН} \cdot \text{м} \cdot 6}{1.7 \cdot 8 \text{ МПа}} = 2554.00 \text{ см}^3.$$

Аналогічно — в перетині С, де $M_y = 1.2045 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_z = -7.813 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

$$h^3 = \left(1.2045 + \frac{7.813}{1.7} \right) \frac{\text{кН} \cdot \text{м} \cdot 6}{1.7 \cdot 8 \text{ МПа}} = 2558.99 \text{ см}^3.$$

З трьох значень оберемо більше: $h^3 = 2558.99 \text{ см}^3$. Тоді $h = \sqrt[3]{2558.99} = 13.68 \text{ см}$, $b = 1.7 \cdot 13.68 = 23.26 \text{ см}$. Прийнемо найближчі більші значення з точністю до 1 см:

$$h = 14 \text{ см}, \quad b = 24 \text{ см}.$$

Визначимо моменти інерції прийнятого перерізу відносно осей у та z:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{24 \cdot 14^3}{12} = 5488 \text{ см}^4,$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} = \frac{14 \cdot 24^3}{12} = 16128 \text{ см}^4.$$

Визначення напружень

Будуємо на рис. 6 схему перерізу. Проводимо його головні осі у та z.

Побудуємо епюру нормального напруження в перетині А, де $M_y = -0.4155 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_z = -7.979 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Нормальне напруження визначається формулою

$$\sigma(y, z) = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z.$$

$\sigma(y, z)$ — лінійна функція, яка дорівнює нулю в точках нульової лінії. Визначимо кут α_A нахилу нульової лінії відносно осі y у перетині А:

$$\operatorname{tg} \alpha_A = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z} = -\frac{-7.979 \cdot 5488}{-0.4155 \cdot 16128} = -6.534,$$

$$\alpha_A = \arctg(-6.534) = -81.3^\circ.$$

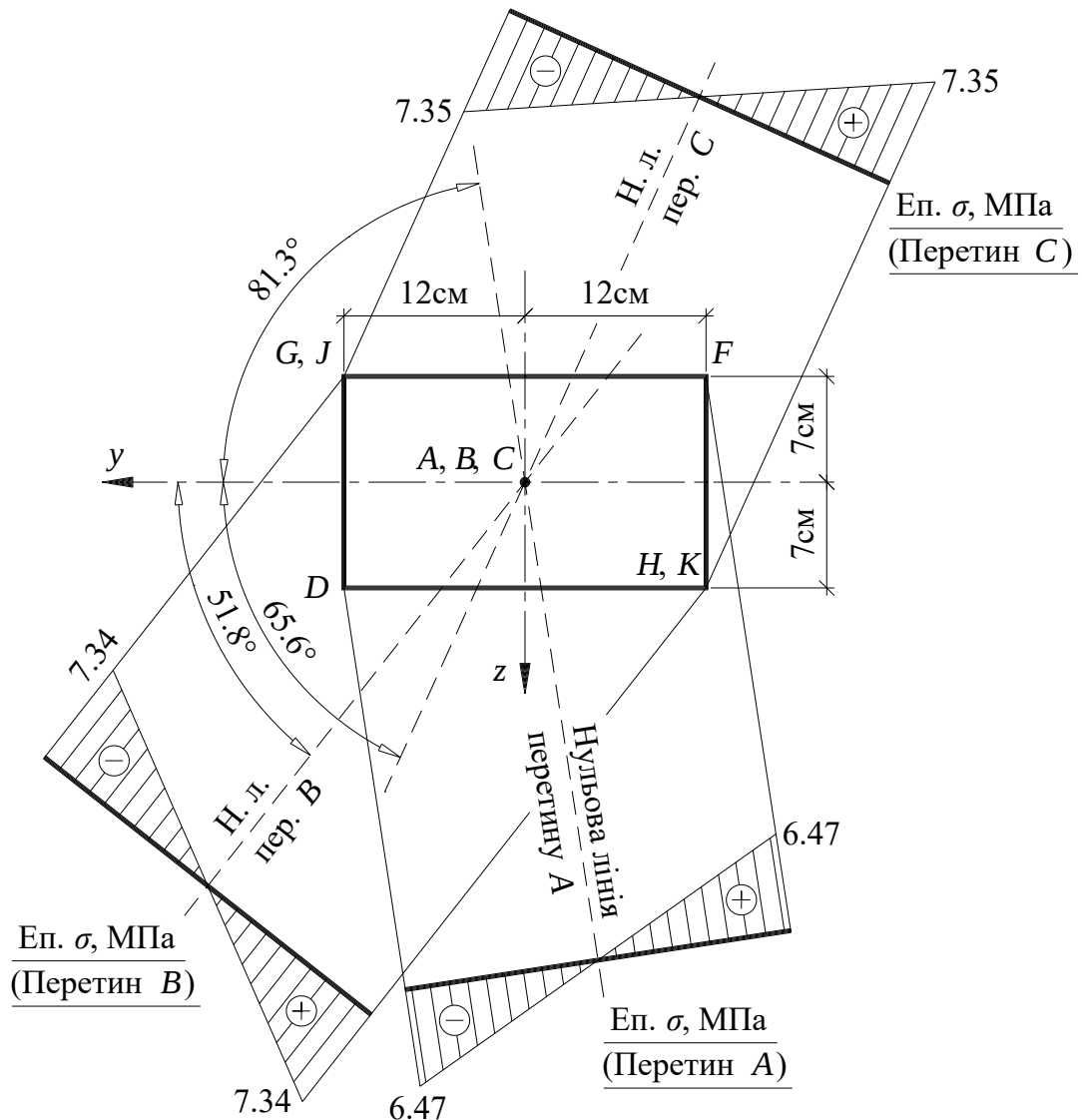


Рис. 6

Побудуємо нульову лінію перетину А на рис. 6. Вона представляє собою пряму, що проходить крізь центр ваги перерізу (точку А) під кутом α_A до осі y . Оскільки $\alpha_A < 0$, відкладаємо кут $|\alpha_A|$ за годинниковою стрілкою.

Найбільш віддаленими від нульової лінії є точки D й F. Достатньо обчислити

значення σ в одній з них. Координати точки D дорівнюють $y_D = 12\text{см}$, $z_D = 7\text{см}$.

Напруження в цій точці становить

$$\begin{aligned}\sigma(y_D, z_D) &= \frac{-7.979\text{кН}\cdot\text{м}}{16128\text{см}^4} 12\text{см} + \frac{-0.4155\text{кН}\cdot\text{м}}{5488\text{см}^4} 7\text{см} = \\ &= \left(-\frac{7.979}{16128} 12 - \frac{0.4155}{5488} 7 \right) 10^3 \text{МПа} = -6.47 \text{МПа}.\end{aligned}$$

Епюру σ в перетині A будуємо на рис. 6.

Побудуємо епюру σ в перетині B , де $M_y = 1.812\text{кН}\cdot\text{м}$, $M_z = -6.761\text{кН}\cdot\text{м}$.

Визначимо кут нахилу нульової лінії α_B :

$$\text{tg } \alpha_B = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z} = -\frac{-6.761 \cdot 5488}{1.812 \cdot 16128} = 1.270,$$

$\alpha_B = \arctg 1.27 = 51.8^\circ$. Будуємо на рис. 6 нульову лінію перетину B , відкладаючи кут α_B від осі y проти годинникової стрілки.

Найбільш віддаленими від нульової лінії є точки G й H . Координати точки G дорівнюють $y_G = 12\text{см}$, $z_G = -7\text{см}$.

$$\sigma(y_G, z_G) = \frac{-6.761\text{кН}\cdot\text{м}}{16128\text{см}^4} 12\text{см} + \frac{1.812\text{кН}\cdot\text{м}}{5488\text{см}^4} (-7\text{см}) = -7.34 \text{МПа}.$$

Епюру σ в перетині B будуємо на рис. 6.

Побудуємо епюру σ в перетині C , де $M_y = 1.2045\text{кН}\cdot\text{м}$, $M_z = -7.813\text{кН}\cdot\text{м}$.

$$\text{tg } \alpha_C = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z} = -\frac{-7.813 \cdot 5488}{1.2045 \cdot 16128} = 2.207,$$

$\alpha_C = \arctg 2.207 = 65.6^\circ$. Будуємо на рис. 6 нульову лінію перетину C . Найбільш віддалені від неї точки J і K .

$$y_K = -12\text{см}, \quad z_K = 7\text{см}.$$

$$\sigma(y_K, z_K) = \frac{-7.813\text{кН}\cdot\text{м}}{16128\text{см}^4} (-12\text{см}) + \frac{1.2045\text{кН}\cdot\text{м}}{5488\text{см}^4} 7\text{см} = 7.35 \text{МПа}.$$

Будуємо на рис. 6 епюру σ в перетині C .

Визначення переміщень

Визначимо вертикальний і горизонтальний прогини вільного кінця балки методом Мора.

Для визначення вертикального прогину точки S розглянемо одиничний стан №1 заданої конструкції (рис. 7). У цьому стані балка завантажена одиничною

зосередженою силою, прикладеною вертикально в точці S.

Балка перебуває у стані згинання у вертикальній площині. Задача зводиться до плоскої. При цьому всі зусилля, крім поперечної сили Q_{z1} і згинального моменту M_{y1} , дорівнюють нулю. Будемо епюру M_{y1} на рис. 7.

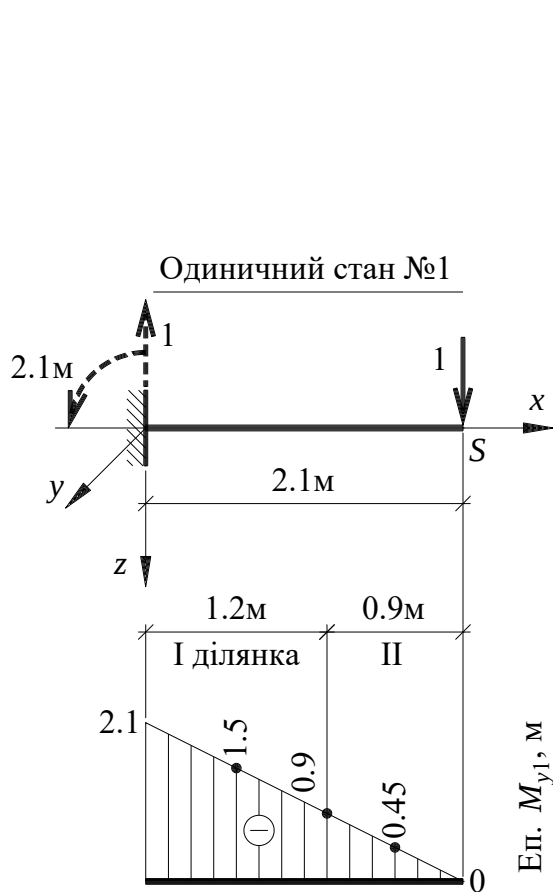


Рис. 7

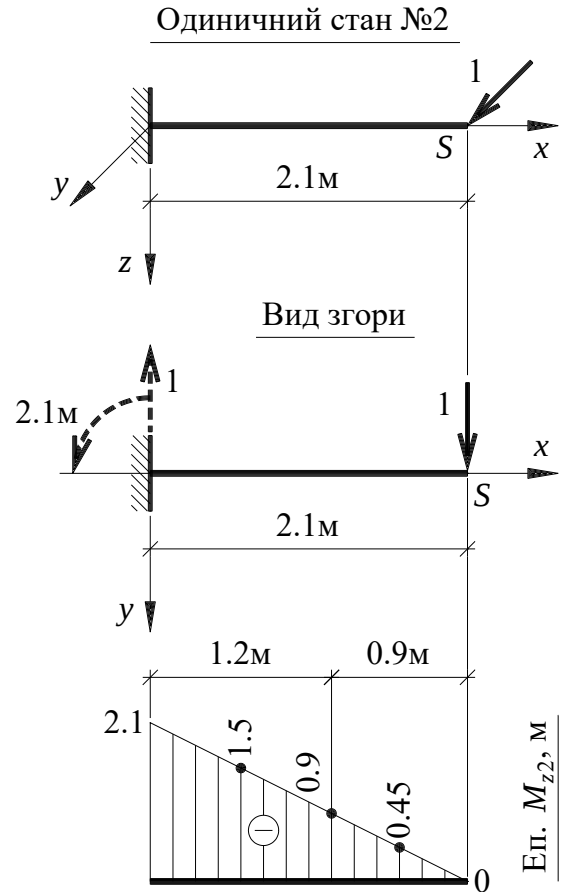


Рис. 8

Переміщення дорівнює інтегралу Мора по всій довжині конструкції, де під інтегралом перемножуються функції згинальних моментів дійсного та одиничного станів. Прогин точки S у напрямку осі z дорівнює

$$w_{zS} = \int_{x=0}^{2.1\text{м}} \left(\frac{M_y(x)M_{y1}(x)}{EI_y} + \frac{M_z(x)M_{z1}(x)}{EI_z} \right) dx,$$

де другий доданок дорівнює нулю, оскільки $M_{z1}(x) = 0$, як було зазначено вище. Даний інтеграл обчислимо за формулою Сімпсона-Корноухова. Для цього довжину конструкції доведеться розбити на дві ділянки, оскільки функція $M_y(x)$ на цих ділянках має різний характер.

$$w_{zS} = \int_{x=0}^{2.1\text{м}} \frac{M_y(x)M_{y1}(x)}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \left(\int_{x=0}^{1.2\text{м}} M_y(x)M_{y1}(x) dx + \int_{x=1.2\text{м}}^{2.1\text{м}} M_y(x)M_{y1}(x) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{EI_y} \left(\frac{1.2\text{м}}{6} [-0.4155\text{кН}\cdot\text{м}(-2.1\text{м}) + 4 \cdot 0.3945\text{кН}\cdot\text{м}(-1.5\text{м}) + 1.2045\text{кН}\cdot\text{м}(-0.9\text{м})] + \right. \\ \left. + \frac{0.9\text{м}}{6} [1.2045\text{кН}\cdot\text{м}(-0.9\text{м}) + 4 \cdot 1.66\text{кН}\cdot\text{м}(-0.45\text{м}) + 1.812\text{кН}\cdot\text{м}\cdot 0] \right) = \frac{-1.127\text{кН}\cdot\text{м}^3}{EI_y}.$$

Від'ємний результат означає, що прогин відбувається в напрямку протилежному до прикладеної нами одиничної сили.

Згинальні жорсткості балки у вертикальній та горизонтальній площинах відповідно дорівнюють

$$EI_y = 10^4 \text{ МПа} \cdot 5488 \text{ см}^4 = 10^4 5488 \cdot 10^{-5} \text{ кН}\cdot\text{м}^2 = 548.8 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$EI_z = 10^4 \text{ МПа} \cdot 16128 \text{ см}^4 = 16128 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Прогин становить

$$w_{zS} = \frac{-1.127\text{кН}\cdot\text{м}^3}{548.8\text{кН}\cdot\text{м}^2} = -2.054 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -2.1 \text{ мм}.$$

Для визначення горизонтального прогину точки S розглянемо одиничний стан №2 (рис. 8), коли до балки прикладено горизонтальну одиничну силу в точці S .

Балка перебуває у стані згинання в горизонтальній площині. Задача зводиться до плоскої задачі в горизонтальній площині. Виникають лише зусилля Q_{y2} і M_{z2} .

Будуємо епюру M_{z2} на рис. 8.

Прогин точки S у напрямку осі u дорівнює

$$w_{yS} = \int_{x=0}^{2.1\text{м}} \left(\frac{M_y(x)M_{y2}(x)}{EI_y} + \frac{M_z(x)M_{z2}(x)}{EI_z} \right) dx,$$

де перший доданок дорівнює нулю, оскільки $M_{y2}(x) = 0$. Інтеграл обчислимо за формулою Сімпсона-Корноухова по двох ділянках, оскільки функція $M_z(x)$ на цих ділянках має різний характер.

$$w_{yS} = \int_{x=0}^{2.1\text{м}} \frac{M_z(x)M_{z2}(x)}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \left(\int_{x=0}^{1.2\text{м}} M_z(x)M_{z2}(x) dx + \int_{x=1.2\text{м}}^{2.1\text{м}} M_z(x)M_{z2}(x) dx \right) = \\ = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1.2\text{м}}{6} [-7.979(-2.1) + 4(-7.896)(-1.5) + (-7.813)(-0.9)] \text{кН}\cdot\text{м}\cdot\text{м} + \right. \\ \left. + \frac{0.9\text{м}}{6} [-7.813(-0.9) + 4(-7.024)(-0.45) + (-6.761)0] \text{кН}\cdot\text{м}^2 \right) = \frac{17.184\text{кН}\cdot\text{м}^3}{EI_z} = \\ = \frac{17.184\text{кН}\cdot\text{м}^3}{16128\text{кН}\cdot\text{м}^2} = 1.0655 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 10.7 \text{ мм}.$$